

2章 問題解答一覧

1 節 集合と論証

●練習 1

- (1) $-5 \in \mathbb{Z}$
- (2) $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$
- (3) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$
- (4) $0 \in \mathbb{Z}$

●練習 2

- (1) $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
- (2) $\{3, 6, 9, \dots\}$
- (3) $\{10, 15, 20, \dots, 90, 95\}$
- (4) $\{1, 3, 5, \dots\}$

●練習 3

- (1) $\{x \mid x \text{ は素数}, 2 \leq x \leq 13\}$
- (2) $\{4n \mid n = 1, 2, 3, \dots, 13\}$

●練習 4

$$A = B, C \subset A, C \subset B$$

●練習 5

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \\ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$$

●練習 6

- (1) $A \cap B = \{6, 12\}$
 $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 15\}$
- (2) $A \cap B = \{10\}$
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$

●練習 7

$$A \cap B \cap C = \{6\}$$

$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$$

●練習 8

- (1) $\overline{A} = \{2, 4, 6, 8\}$
- (2) $\overline{B} = \{1, 2, 3, 4\}$
- (3) $\overline{A} \cap \overline{B} = \{2, 4\}$
- (4) $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$
- (5) $A \cap \overline{B} = \{1, 3\}$
- (6) $\overline{A} \cup B = \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$
- (7) $\overline{A \cap B} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$
- (8) $\overline{A \cup B} = \{2, 4\}$

●問 1

[図中の $\overline{A}$ と $\overline{B}$ にあたる部分に斜線などをつけて考える。]

●練習 9

[$\overline{A}$, $\overline{B}$ それぞれを図で表したものをもとに, その和集合 $\overline{A} \cup \overline{B}$ を図で表す。これが $\overline{A \cap B}$ の表す部分と一致することを確認する。]

●練習 10

- (1) 偽
- (2) 偽
- (3) 真

●練習 11

①

●練習 12

- (1) 真
- (2) 偽 反例 $x = -5$
- (3) 偽 反例 $n = 2$
- (4) 偽 反例 $n = 9$

●練習 13

- (1) 十分
- (2) 必要
- (3) 必要

●練習 14

- (1) 十分条件であるが必要条件ではない
- (2) 必要条件でも十分条件でもない
- (3) 必要十分条件である
- (4) 必要条件であるが十分条件ではない

●練習 15

- (1) $x < 3$
- (2) $x + y \geq 0$
- (3) x は無理数である

●練習 16

- (1) $x = 0$ または $x = 1$
- (2) $x > 0$ かつ $y > 0$
- (3) x, y の少なくとも一方は無理数である。

●練習 17

- (1) 逆 「 $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ 」 真
裏 「 $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$ 」 真
対偶 「 $x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ 」 真
- (2) 逆 「 $x > 1 \Rightarrow x > 2$ 」 偽 (反例 $x = \frac{3}{2}$)
裏 「 $x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1$ 」 偽 (反例 $x = \frac{3}{2}$)
対偶 「 $x \leq 1 \Rightarrow x \leq 2$ 」 真
- (3) 逆 「 n が 4 の倍数ならば, n は偶数である。」 真
裏 「 n が奇数ならば, n は 4 の倍数でない。」 真
対偶 「 n が 4 の倍数でないならば, n は奇数である。」 偽 (反例 $n = 2$)

●練習 18

[対偶「 n が偶数ならば, n^2 は偶数」が真であることを証明する。]

●練習 19

[対偶が真であることを証明する。]

●練習 20

[$2 - \sqrt{5}$ が無理数でないと仮定し, 背理法を用いる。]

●練習 21

[$\sqrt{3}$ が無理数でないと仮定し, 背理法を用いる。]

●練習 22

[まず, $q = 0$ であることを証明する。]

節末問題 (p.66)

[1]

$$A = \{2, 6, 7, 8\}$$

[2]

- (1) 偽 (反例 $x = 1$ かつ $y = -1$)
- (2) 偽 (反例 $x = 2$ かつ $y = -2$)
- (3) 真 [対偶を利用して証明する。]

[3]

- (1) ②
- (2) ①
- (3) ①
- (4) ③

[4]

- (1) 対偶「 $x = y = 0$ ならば $x + y = 0$ である。」
真
- (2) 対偶「 $x + y \neq 0$ ならば $xy \neq 0$ である。」
偽

Progress

[背理法を用いて証明する。]

章末問題 A (p.67)

[1]

- (1) 略
- (2) $k = 3, 5, 11$

[2]

- (1) $\bar{A} \cap B = \{7, 8\}$
- (2) $B \cup \bar{C} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10\}$
- (3) $\bar{A} \cap \bar{C} = \{2, 4, 8, 10\}$
- (4) $(A \cup B) \cap C = \{5, 6, 7\}$
- (5) $A \cap B \cap \bar{C} = \{3\}$
- (6) $\overline{A \cap B \cap C} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$

[3]

[$ab > 0$ より, a と b は同符号であることを
利用する。]

章末問題 B (p.67)

[4]

- (1) 偽 (反例 $a = \sqrt{2}, b = -\sqrt{2}$)
- (2) 真 [対偶を利用して証明する。]
- (3) 偽 (反例 $a = \sqrt{2}, b = -\sqrt{2}$)

[5]

- (1) [背理法を利用して証明する。]
- (2) $x = 4, y = -1$

発展「すべて」と「ある」の否定

●演習 1

- (1) ある実数 x について $x^2 + 2x + 1 \leq 0$ である。
もとの命題は偽, その否定は真
- (2) すべての自然数 n について $n^2 \leq 2^n$ である。
もとの命題は真, その否定は偽