数学Ⅰ Progress　１章　チャレンジ問題　解答

★ $\boxed{1}$　x の連立不等式 $\begin{cases} ax > a - a^2 \\ bx > 3b - 2 \end{cases}$ $\left(a \neq 0,\ b \neq 0\right)$ の解が，$-1 < x < 5$ となるように，定数 a，b の値を定めよ。

（解答）

$\begin{cases} ax > a - a^2 & \cdots\cdots ① \\ bx > 3b - 2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ とすると

$-1 < x < 5$ の解をもつためには①と②の不等号の向きから

$a > 0$，$b < 0$ または $a < 0$，$b > 0$ である。

（ⅰ）$a > 0$，$b < 0$ のとき

①の解は　$x > 1 - a$

②の解は　$x < 3 - \frac{2}{b}$

よって　$1 - a < x < 3 - \frac{2}{b}$

これが $-1 < x < 5$ となるためには

$1 - a = -1$ かつ $3 - \frac{2}{b} = 5$

これより　$a = 2$，$b = -1$

これは $a > 0$，$b < 0$ を満たす。

（ⅱ）$a < 0$，$b > 0$ のとき

①の解は　$x < 1 - a$

②の解は　$x > 3 - \frac{2}{b}$

よって　$3 - \frac{2}{b} < x < 1 - a$

これが $-1 < x < 5$ となるためには

$3 - \frac{2}{b} = -1$ かつ $1 - a = 5$

これより　$a = -4$，$b = \frac{1}{2}$

これは $a < 0$，$b > 0$ を満たす。

（ⅰ），（ⅱ）より

$\boldsymbol{a = 2,\ b = -1}$ **または** $\boldsymbol{a = -4,\ b = \frac{1}{2}}$

$\boxed{2}$　$x+y=4$，$x^2+y^2=20$ $(x>y)$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　xy　　　　　　(2)　$x-y$

（解答）

(1)　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ より

$20=4^2-2xy$

これを整理して

$\boldsymbol{xy=-2}$

(2)　$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$ より

$$\begin{aligned}(x-y)^2&=x^2+y^2-2xy\\&=20-2\cdot(-2)\\&=24\end{aligned}$$

$x>y$ より，$x-y>0$ であるから

$\boldsymbol{x-y=2\sqrt{6}}$