

★ 1 2 次関数 $y = x^2 - 2mx + 2m + 4$ のグラフと x 軸との共有点について、次の問いに答えよ。ただし、 m は定数とする。

(1) 共有点をもつときの m の値の範囲を求めよ。

(2) グラフが x 軸から切り取る線分の長さが 4 であるとき、 m の値と共有点の x 座標を求めよ。

(解答)

$$y = x^2 - 2mx + 2m + 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \text{ とする。}$$

(1) $x^2 - 2mx + 2m + 4 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = m^2 - (2m + 4) = m^2 - 2m - 4$$

①のグラフが x 軸と共有点をもつためには $D \geq 0$ であればよいから

$$m^2 - 2m - 4 \geq 0$$

ここで、 $m^2 - 2m - 4 = 0$ の解は $m = 1 \pm \sqrt{5}$ であることから、

求める m の値の範囲は

$$m \leq 1 - \sqrt{5}, \quad 1 + \sqrt{5} \leq m$$

(2) $m^2 - 2m - 4 \geq 0$ であるとき、②の解は

$$x = m \pm \sqrt{m^2 - 2m - 4} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

よって、 x 軸から切り取る線分の長さは

$$(m + \sqrt{m^2 - 2m - 4}) - (m - \sqrt{m^2 - 2m - 4}) = 2\sqrt{m^2 - 2m - 4}$$

$$\text{条件より} \quad 2\sqrt{m^2 - 2m - 4} = 4$$

$$\text{すなわち} \quad \sqrt{m^2 - 2m - 4} = 2$$

$$\text{両辺を 2 乗して} \quad m^2 - 2m - 4 = 4$$

$$\text{ゆえに、} (m + 2)(m - 4) = 0 \text{ より } m = -2, 4$$

$$\text{よって、} \textcircled{3} \text{より} \quad \begin{cases} m = -2 \text{ のとき} & x = -4, 0 \\ m = 4 \text{ のとき} & x = 2, 6 \end{cases}$$

2 原価が 1 個 80 円の品物を単価 100 円で売ると 1 日平均 100 個売れるが、単価を 10 円値上げすると 1 日平均 5 個の割合で売り上げが減少する。次の問いに答えよ。

(1) 1 日の売り上げ金額を最大にするには、単価をいくりにすればよいか。また、そのときの売り上げ金額を求めよ。

(2) 1 日の利益の総額を最大にするには、単価をいくりにすればよいか。また、そのときの利益の総額を求めよ。

(解答)

(1) 単価を $10x$ 円値上げするとし、売り上げを S 円とすると

$$\begin{aligned} S &= (100 + 10x) \cdot (100 - 5x) \\ &= -50x^2 + 500x + 10000 \\ &= -50(x - 5)^2 + 11250 \end{aligned}$$

よって、 S は $x = 5$ のとき最大値 11250 をとる。

ゆえに、1 日の売り上げ金額を最大にするには、単価を **150 円** にすればよい。

また、そのときの売り上げ金額は **11250 円**。

(2) 単価を $10x$ 円値上げするとし、利益を P 円とすると

$$\begin{aligned} P &= \{(100 + 10x) - 80\} \cdot (100 - 5x) \\ &= (20 + 10x)(100 - 5x) \\ &= -50x^2 + 900x + 2000 \\ &= -50(x - 9)^2 + 6050 \end{aligned}$$

よって、 P は $x = 9$ のとき最大値 6050 をとる。

ゆえに、1 日の利益の総額を最大にするには、単価を **190 円** にすればよい。また、

そのときの利益の総額は **6050 円**。