- ★ 1 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{5}$ のとき, $\sin \theta, \cos \theta$ の値を求めよ。ただし, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。

(解答)

$\cos \theta = \frac{1}{5} - \sin \theta$ として, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ に代入する。

$$\sin^2 \theta + \left(\frac{1}{5} - \sin \theta\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \theta + \frac{1}{25} - \frac{2}{5} \sin \theta + \sin^2 \theta = 1$$

分母を払って整理すると

$$25 \sin^2 \theta - 5 \sin \theta - 12 = 0$$

$$(5 \sin \theta + 3)(5 \sin \theta - 4) = 0$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから $\sin \theta \geq 0$

したがって $\sin \theta = \frac{4}{5}$

このとき $\cos \theta = \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{3}{5}$

よって $\sin \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = -\frac{3}{5}$

2 $\triangle ABC$ の外接円の半径を R , 面積を S とするとき, 次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

(解答)

$$2R = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ より}$$

$$R^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{b}{\sin B} \cdot \frac{c}{\sin C}$$

これを右辺に代入すると

$$\left(\text{右辺} \right) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{b}{\sin B} \cdot \frac{c}{\sin C} \sin A \sin B \sin C$$

$$= \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$= S \quad (\text{証明終})$$